

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2017, Convocatoria
extraordinaria

mentoor.es



Sèrie 2

Ejercicio 1. Geometría

Considere el plano $\pi : x + y + z = 1$ y la recta r que pasa por los puntos $P = (0, 0, 6)$ y $Q = (1, 2, 3)$.

- Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .
- Calcule la distancia entre la recta r y el plano π .

Solución:

- Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .

El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = Q - P = (1, 2, -3)$.

El vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$.

Estudiamos el producto escalar de ambos vectores para determinar si la recta es paralela o secante al plano.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1)(1) + (2)(1) + (-3)(1) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Como el producto escalar es cero, los vectores son ortogonales, lo que significa que la recta es paralela al plano o está contenida en él.

Para distinguirlo, comprobamos si un punto de la recta, como $P(0,0,6)$, pertenece al plano.

$$0 + 0 + 6 = 6 \neq 1.$$

El punto no pertenece al plano, por lo tanto, la recta es paralela al plano.

La recta r es paralela al plano π .

- Calcule la distancia entre la recta r y el plano π .

Como la recta es paralela al plano, la distancia es la distancia de cualquier punto de la recta (por ejemplo, P) al plano.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|0 + 0 + 6 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

La distancia es $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ unidades.

Ejercicio 2. Álgebra

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

- Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, en que I es la matriz identidad de orden 3.
- Haciendo servir la igualdad anterior, encuentre la matriz inversa de A : A^{-1} .

Solución:

- Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, en que I es la matriz identidad de orden 3.

Para verificar la igualdad, calcularemos cada término por separado.

Primero, calculamos A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación, calculamos el producto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, multiplicamos este resultado por $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}A \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, realizamos la resta para comprobar la igualdad:

$$A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Queda demostrada la igualdad.

La igualdad $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$ es correcta.

- Haciendo servir la igualdad anterior, encuentre la matriz inversa de A : A^{-1} .

Partimos de la igualdad demostrada: $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$.

Para encontrar la inversa de A , debemos llegar a una expresión de la forma $A \cdot X = I$, donde X será, por definición, A^{-1} .



Sacamos factor común la matriz A por la izquierda en el lado izquierdo de la igualdad:

$$A \cdot \left(A - \frac{1}{2}B \right) = I.$$

Comparando con la definición de matriz inversa, podemos concluir que:

$$A^{-1} = A - \frac{1}{2}B.$$

Procedemos a calcular esta expresión:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-3/2 & 1-2 & 1-(-1/2) \\ 0-(-1/2) & -2-(-2) & 1-3/2 \\ 1-0 & -1-(-2) & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro real a .
- b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

Solución:

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro real a .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = a - 2 - (a - 2) = 0.$$

El determinante es 0 para todo a . Por tanto, $\text{Rg}(A) < 3$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que $\text{Rg}(A) = 2$ para todo a .

Estudiamos el rango de la ampliada A^* :

$$|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2a \end{vmatrix} = 0.$$

$$|C_1, C_3, C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 2a - 6 \neq 0 \iff a \neq 3.$$

Caso 1: $a \neq 3 \implies \text{Rg}(A) = 2, \text{Rg}(A^*) = 3$. **S.I.**

Caso 2: $a = 3$. $\text{Rg}(A) = 2, \text{Rg}(A^*) = 2$. **S.C.I.**

Si $a = 3$, es S.C.I. Si $a \neq 3$, es S.I.

- b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

Para $a = 2$, el sistema es Incompatible, por lo tanto no tiene solución.

Para $a=2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Ejercicio 4. Análisis

De las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$, conocemos los valores siguientes:

x	$f(x)$	$f'(x)$	x	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	1	0	1	1
1	0	-6	1	3	3

- a) De la función $f(x)$ sabemos también que el pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$.
 b) Calcule $(g \circ f)'(1)$.

Solución:

- a) De la función $f(x)$ sabemos también que el pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$.

Sabemos que $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$.

Integramos para hallar $f(x)$:

$$f(x) = \int (4x^3 - 9x^2 - 2x + 1) dx = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + C.$$

De la tabla, sabemos que $f(0) = 2$.

$$f(0) = 0 - 0 - 0 + 0 + C = 2 \implies C = 2.$$

$$\boxed{f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2.}$$

- b) Calcule $(g \circ f)'(1)$.

Aplicamos la regla de la cadena: $(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$. Buscamos los valores en la tabla: $f(1) = 0$. $f'(1) = -6$. Ahora necesitamos $g'(f(1)) = g'(0)$, que también está en la tabla: $g'(0) = 1$.

$$(g \circ f)'(1) = g'(0) \cdot f'(1) = 1 \cdot (-6) = -6.$$

$$\boxed{\text{El valor es -6.}}$$



Ejercicio 5. Geometría

En $\mathbb{R}^3$ sean la recta $r : \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 1, -1)$.

- Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P .
- Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$.

Solución:

- Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P .

El vector director de r es el normal del plano π .

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 2).$$

El plano es $2x - y + 2z + D = 0$. Pasa por $P(0, 1, -1)$: $2(0) - 1 + 2(-1) + D = 0 \implies -3 + D = 0 \implies D = 3$.

$2x - y + 2z + 3 = 0.$

- Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$.

Recta s perpendicular al plano que pasa por P : $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$. $s \equiv (x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda(1, 1, 1)$.

Intersección M de s y el plano: $\lambda + (1 + \lambda) + (-1 + \lambda) = -3 \implies 3\lambda = -3 \implies \lambda = -1$. $M = (-1, 0, -2)$.

Punto simétrico $P' = 2M - P = (-2, 0, -4) - (0, 1, -1) = (-2, -1, -3)$.

$P' = (-2, -1, -3).$

Ejercicio 6. Análisis

Sea la función $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

- Calcule una primitiva de la función $f(x)$.
- Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de las abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = \pi/4$.

Solución:

- Calcule una primitiva de la función $f(x)$.

Buscamos $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$. Hacemos el cambio de variable $u = \cos x \implies du = -\sin x dx$.

$$\int \frac{-du}{u^2} = - \int u^{-2} du = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Una primitiva es $F(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de las abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = \pi/4$.

En $[0, \pi/4]$, $f(x) \geq 0$.

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{\cos x} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{\cos(\pi/4)} - \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

El área es $\sqrt{2} - 1$ u².